Uitwerking Puzzel 92 - 7 Wobien Doyer
**Allemaal gelijk?** Lieke de Rooij

Er zijn veel puzzels over het opsporen van één valse munt tussen een aantal goede munten met hulp van een balans. Bij deze puzzel is er echter sprake van een partij identieke munten die mogelijk is vermengd met een of meerdere valse munten. Die valse munten wegen allemaal even veel, maar wel anders dan de echte.
De enige vraag is of alle munten gelijk zijn, dus ofwel allemaal vals ofwel allemaal echt. En dat proberen we met enkel een balans (zonder gewichten, zodat we alleen munten tegen elkaar kunnen afwegen) in zo min mogelijk wegingen te bepalen.

Zodra er bij het wegen een keer geen evenwicht is kunnen we natuurlijk stoppen, dan zijn niet alle munten gelijk. Het gaat ons steeds om het aantal keren dat we moeten wegen als alle munten gelijk zijn.
We geven vast een voorlopige afschatting die we als standaard gebruiken.

**Stelling**: Voor $2^{k-1} < n \leq 2^k$ lukt het met $n$ munten in $k$ wegingen.

Uit de resultaten zal echter blijken dat het al voor alle $n \geq 33$ mogelijk is om met minder wegingen dan volgens deze stelling aan te tonen dat alle munten gelijk zijn.

**Opgave 1a**: Bewijs de stelling.

Uitwerking: Leg bij de eerste weging 1 munt op elke schaal. Doe bij elke volgende weging alle al gewogen munten in de ene schaal en een gelijk aantal nog niet gewogen munten in de andere schaal. Als na $k-1$ wegingen er steeds evenwicht was, hebben we $2^{k-1}$ munten waarvan we weten dat ze allemaal gelijk zijn. Het aantal munten dat nog niet gewogen is, is nu $\leq 2^{k-1}$, dus in de laatste weging kunnen we alle nog niet gewogen muten wegen tegen een gelijk aantal al wel gewogen munten.

**Opgave 1b**: Toon ook aan dat meer algemeen geldt: Als het lukt met $n = a$ munten in $w$ keer wegen, dan lukt het voor $a < n \leq 2a$ in $w + 1$ keer wegen.

Uitwerking: Na $w$ wegingen hebben we dan van $a$ munten vastgesteld of ze allemaal even zwaar zijn. Als dat zo is, kunnen we de rest (dat zijn er dus hoogstens $a$) wegen tegen een gelijk aantal al gewogen munten.

De grenzen uit de stelling nemen we als standaard en we gaan proberen of we die voor bepaalde waarden van $n$ kunnen verbeteren.

We onderzoeken dat steeds voor een bepaalde waarde van $n$.

Stel we hebben een manier van wegen gevonden waarmee je kunt bepalen of die $n$ munten allemaal wel of niet gelijk zijn.

Bij elke weging zijn er dan een aantal munten op de linkerschaal, een zelfde aantal op de rechterschaal en eventueel munten die bij die weging niet meedoen.

Munten die daarbij bij geen van de wegingen van elkaar zijn gescheiden, noemen we een groep.

Onze manier van wegen wordt dan gekenmerkt door het aantal groepen en de aantallen munten per

groep: $A \leq B \leq \ldots \leq \ldots$ , met $A + B + C + \ldots = n$.

We kunnen dan de wegingen noteren als bijvoorbeeld : $A + C \Leftrightarrow E + F$ etc. Merk op dat hiermee de hele 'manier van wegen' wordt vastgelegd.

Elke weging die in evenwicht is kunnen we dan weergeven met een vergelijking.

Een voorbeeld met $n = 27$ en $w = 4$: De grootte van de groepen $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ en $F$ is 1, 1, 3, 5, 8, 9.
De wegingen zijn:
$A + C + F \Leftrightarrow D + E$
$A + B + F \Leftrightarrow C + E$
$A + C + D \Leftrightarrow F$
$A + E \Leftrightarrow B + C + D$

We kunnen nu 4 onafhankelijke vergelijkingen opstellen in de variabelen $a$, $b$, $c$ , $d$, $e$ en $f$ door de hoofdletters door kleine letters te vervangen en '⇔'door '='. De aantallen munten in de groepen zijn dus altijd een oplossing van het stelsel vergelijkingen. Als er evenwicht is zijn ook de gewichten van de groepen dat, en omdat er maar 2 soorten munten zijn, ook de aantallen van een van de 2 muntsoorten in elk van die groepen. Aan u de keuze welke betekenis u aan de kleine letters geeft, afhankelijk van uw aanpak en/of de indeling in groepen.

Hoewel we hier dus maar 4 vergelijkingen hebben en 6 onbekenden is het toch mogelijk om hiermee aan te tonen dat bij evenwicht alle munten van eenzelfde soort zijn, dus allemaal gelijk.

**Opgave 2**: Toon aan dat als deze 4 wegingen ($w = 4$) in evenwicht zijn geldt dat alle 27 munten gelijk zijn, dus met $w$ kleiner dan volgens de standaard.

Uitwerking: Stel er is in de 4 bedoelde wegingen evenwicht. Laat type $a$ de munten zijn van dezelfde soort als de munt in groep $a$.
Dan moeten de 4 vergelijkingen:
1: $a + c + f = d + e$
2: $a + b + f = c + e$
3: $a + c + d = f$
4: $a + e = b + c + d$
voldoen aan de interpretatie: de letters stellen de aantallen munten van type $a$ in de groepen voor.
Natuurlijk geldt dan $a = 1$, $0 \leq b \leq 1$; $0 \leq c \leq 3$, $0 \leq d \leq 5$, $0 \leq e \leq 8$, $0 \leq f \leq 9$.
We kunnen nu door elimineren $c$, $d$, $e$ en $f$ uitdrukken in $a$ en $b$:
$c = 3a$
$d = 6a - b$
$e = 8a$
$f = 10a - b$
Gecombineerd met de ongelijkheden wordt dat: $b = 1$, $c = 3$, $d = 5$, $e = 8$ en $f = 9$, dus alle munten zijn van type $a$.

Ook voor $n = 10$ is het mogelijk de standaard te verbeteren. Daarbij gebruiken we groepen ($A$, $B$, $C$, $D$) met groottes (1, 2, 3, 4), een opvolgend rijtje.

**Opgave 3a**: Toon aan dat we voor $n = 10$ slechts 3 wegingen nodig hebben.

Uitwerking: Maak 4 groepen: $A$, $B$, $C$ en $D$ met 1, 2, 3 en 4 munten. Dan zijn er 3 wegingen mogelijk met aan beide zijden evenveel munten:
$A + D \Leftrightarrow B + C$; $A + B \Leftrightarrow C$; $A + C \Leftrightarrow D$.

Door gebruik van opgave 1b betekent dat, dat we voor $n = 11$ tot en met $n = 20$ met maximaal 4 wegingen klaar zijn. Dat is voor $n = 17$, 18, 19 en 20 een verbetering van de standaard.

We kunnen dus grenzen verleggen: de grens bij de standaard van $n = 16$ kan worden verlegd naar $n = 20$. En ook die van $n = 32$ naar 40 enzovoort. Merk op dat we hiermee nog niet voor alle $n$ een verbetering hebben gevonden. Toch is dat wel mogelijk met behulp van de oplossing voor $n = 10$ in 3 wegingen. We kunnen dan de grootte van de groepen meerdere keren met 10 vermenigvuldigen waardoor we steeds 3 wegingen meer nodig hebben.
Merk op dat het niet vanzelfsprekend is, dat we als $n = a$ in $w$ wegingen kan, dat het dan voor $n = a^2$ in $2w$ wegingen lukt. Met $n = 10$ kan dat wel, maar dat moet u dan wel toelichten bij opgave 3b.

**Opgave 3b**: Vanaf welke waarde voor $n$ kunnen we zo voor elke $n$ met minder wegingen toe dan bij de standaard en toon aan dat dat zo is?

Uitwerking: Als we een methode vinden om voor een tweemacht met minder wegingen toe te kunnen dan de standaard dan verlagen we daarmee ook het aantal wegingen dat nodig is voor alle getallen daarna.
Of we vinden een weegschema voor een getal $n$ dat kleiner is dan die tweemacht, waarbij het aantal wegingen twee (of meer) kleiner is dan de standaard. Volgens opgave 1b kunnen we dan voor alle volgende getallen tot en met de tweemacht die volgt op $n$ toe met één weging meer, dus nog steeds minder dan de standaard. Dus kunnen we vanaf $n$ toe met minder dan de standaard.

We zoeken dus een getal waarvoor we een weegschema kunnen maken met een aantal wegingen dat 2 kleiner is dan de standaard. Dat lukt als we kijken naar producten van getallen waarvoor we al een ‘gunstig’ weegschema hebben.

Merk eerst op dat de volgende redenering, die we aantroffen in de inzendingen die we kregen, onjuist is:
Als we een methode $a$ hebben die in $v$ wegingen kan bepalen of $n$ munten allemaal gelijk zijn, en een methode $b$ die in $w$ wegingen kan bepalen of $m$ munten allemaal gelijk zijn, dan kunnen we in $v + w$ wegingen voor $n \cdot m$ munten bepalen of ze allemaal gelijk zijn als volgt:
Neem eerst $n$ munten en bepaal in $v$ wegingen met methode $a$ of ze allemaal gelijk zijn. Maak nu een stapeltje van die $n$ munten, en maak nog $m - 1$ stapeltjes van $n$ van de rest van de munten. Pas nu methode $b$ toe op de $m$ stapeltjes. Daarvoor hebben we $w$ wegingen nodig zodat de klus geklaard is in $v + w$ wegingen.
Helaas klopt dit niet altijd: we hebben het over methoden die in een bepaald aantal wegingen kunnen bepalen of een bepaald aantal munten allemaal gelijk zijn als we weten dat er maar 2 soorten munten zijn. Maar als we de methode gaan toepassen op zakken met munten, dan kunnen er bij die zakken meer dan 2 verschillende gewichten voorkomen, omdat in verschillende zakken verschillende aantallen valse munten kunnen voorkomen.

We moeten dus eerst nader kijken naar de methode uit opgave 3a, en aantonen dat het bij deze methode wel goed gaat. We hebben dus na de eerste $v$ wegingen een stapeltje van $n$ gelijke munten die in de wegingen van de methode van 3a in groep $A$ zitten.

Laat $a$, $b$, $c$ en $d$ voorstellen: het aantal munten in de groepen van de soort die in het stapeltje van groep $A$ zit. Dan hebben we $a = n$, en omdat $b = 2a$, $c = 3a$ en $d = 4a$ zitten er in de groepen dus de $2n$, $3n$ en $4n$ munten van die soort en zijn ze allemaal gelijk.

We gaan nu kijken hoe we hiervan gebruik kunnen maken om bij een zekere $n$ toe te kunnen met 2 wegingen minder dan de standaard.
Als we onze methode voor 10 munten in 3 wegingen eerst toepassen op 10 munten en daarna op 10 stapeltjes van 10 munten, dan hebben we een methode voor 100 munten in 6 wegingen,
Dat is nog niet 2 minder dan de standaard, dus we passen nog eens de methode toe op 10 stapels van 100. Dan hebben we een methode voor 1.000 munten in 9 wegingen, en dat is nog steeds niet 2 minder dan de standaard. Dus we blijven het aantal munten vertienvoudigen tot we met 2

wegingen minder dan de standaard toe kunnen. Dat gebeurt bij n=10.000, dus 4x3=12 wegingen, terwijl de standaard dan 14 is. En dus hebben we aangetoond: vanaf n=10.000 kunnen we voor elke n toe met minder wegingen dan de standaard.

Maar 10.000 is niet het kleinste getal waarvoor dat geldt. We hebben al $n = 1000$ met 9 wegingen. Vanaf daar 4 maal verdubbelen levert dan $8000 < n \leq 16000$ met 13 wegingen.
Voor $2^{13} = 8192 < n \leq 2^{14} = 16384$ is de standaard 14.
We hebben dus: vanaf 8.193 kunnen we voor elke n toe met minder wegingen dan de standaard.

Dat was een goed antwoord op de vraag. Maar enkele inzenders gaven nog een veel lagere grens: ze gebruikten ook de methode uit opgave 2 die voor 27 munten 4 wegingen nodig heeft.
Ze pasten de methode voor 10 munten toe op stapels van 27 munten, waarvan er één is gewogen volgens de methode uit opgave 2. We hebben zo een methode voor 270 munten in 7 wegingen, en de standaard voor 270 is 9 (want $270 > 256 = 2^8$). We kunnen dus vanaf 270 voor elke $n$ met minder dan de standaard toe.

En ook dat kunnen we nog verbeteren. Voor 257 – 270 is de standaard 9, maar we konden bij 100 munten toe met 6 wegingen, dus voor 101 – 200 met 7 en voor 201 – 400 met 8. En dus kunnen we vanaf 257 munten toe met minder wegingen dan de standaard.

In opgave 3a met $n = 10$ hebben we een voorbeeld met groepen van opvolgende grootte. En er zijn meer van die rijtjes waarbij het lukt om de standaard te verbeteren. Die rijtjes kunnen langer zijn en hoeven niet per se bij 1 te beginnen.

**Opgave 4**: Onderzoek voor welke $n$ de standaard is te verbeteren als we 5 groepen maken waarbij de groottes een rij opvolgende getallen vormen.

Uitwerking: We maken groepen $A$, $B$, $C$, $D$ en $E$ met $a$, $a + 1$, $a + 2$, $a + 3$ en $a + 4$ munten, dus in totaal $n = 5a + 10$ munten. Als we daarvoor met 4 wegingen toekunnen hebben we een verbetering van de standaard als $5a + 10 > 16$, dus als $a > 1$.
De wegingen:
$A + E \Leftrightarrow B + D$
$A + D \Leftrightarrow B + C$
$B + E \Leftrightarrow C + D$
hebben dan (bij elke waarde van $a$) gelijke aantallen munten links en rechts.
Maar we hebben ook minstens één weging nodig waarbij het aantal groepen links en rechts ongelijk is (anders kunnen we nooit constateren of er niet in alle groepen één afwijkende munt zit). De mogelijkheden voor zo'n weging hangen af van de waarde van $a$: Voor $a > 4$ is zo'n weging niet meer te vinden, maar voor $a = 4$, $a = 3$ en $a = 2$ wel. We hebben dan:

| $a$ | $A, B, C, D, E$ | $n$ | gelijkheid | 4^e^ weging | verhouding |
|---|---|---|---|---|---|
| 2 | 2, 3, 4, 5, 6 | 20 | 2 + 3 = 5 | $A + B \Leftrightarrow D$ | 2 : 3 : 4 : 5 : 6 |
| 3 | 3, 4, 5, 6, 7 | 25 | 3 + 4 = 7 | $A + B \Leftrightarrow E$ | 3 : 4 : 5 : 6 : 7 |
| 4 | 4, 5, 6, 7, 8 | 30 | 4 + 5 + 6 = 7 + 8 | $A + B + C \Leftrightarrow D + E$ | 4 : 5 : 6 : 7 : 8 |

In alle gevallen leveren de 4 wegingen een onafhankelijk stelsel van 4 homogene vergelijkingen in 5 onbekenden op, zodat we de verhouding $a : b : c : d : e$ kunnen bepalen.
Dat zijn dan natuurlijk de verhoudingen tussen de aantallen munten in de groepen, omdat de aantallen munten aan de vergelijkingen voldoen.
Maar ook moeten beide soorten munten in die verhouding in de groepen aanwezig zijn. Maar die

verhouding tussen een aantal objecten betekent dat het totaal aantal objecten een veelvoud van respectievelijk 20, 25 of 30 moet zijn. Dus zijn alle munten van dezelfde soort, en hebben we een verbetering van de standaard voor $n$ = 20, 25 en 30.

Bij die rijtjes is het aantal groepen steeds 1 groter dan het aantal wegingen. Dat dat niet altijd zo hoeft te zijn blijkt uit het voorbeeld voor $n$ = 27 (opgave 2), met 4 weginen.

**Opgave 5**: Analoog aan dit voorbeeld, met het aantal groepen 2 groter dan het aantal wegingen, lukt het ook met sommige andere waarden van $n$, zoals $n$ = 24, 26 en wellicht nog meer. Onderzoek hoe dit lukt voor minstens een van deze voorbeelden. Uiteraard met $w$ kleiner dan de standaard.

Uitwerking:
We geven hier voorbeelden voor een verdeling en wegingen voor $n$ = 26 en $n$ = 24, maar er zijn veel meer mogelijkheden.

Voor $n = 26$: maak groepen $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ en $F$ met 1, 1, 3, 4, 7 en 10 munten.
Wegingen:
$B + C + E \Leftrightarrow A + F$
$A + C + D \Leftrightarrow B + E$
$A + C \Leftrightarrow D$
$A + B + D + E \Leftrightarrow C + F$
Uit de bijbehorende 4 vergelijkingen kunnen we weer door elimineren $c$, $d$, $e$ en $f$ uitdrukken in $a$ en $b$, waarbij $a$ tot en met $f$ de aantallen munten van type $a$ in de groepen zijn.
$c = 3a$
$d = 4a$
$e = 8a - b$
$f = 10a$
Omdat $a = 1$ zijn alle munten in $C$, $D$ en $F$ ook van type $a$
Omdat $e \leq 7$ en $b \geq 0$ volgt uit de derde vergelijking dat $b = 1$ en $e = 7$, dus ook de munten in $B$ en $E$ zijn van type $a$.

Voor $n = 24$: groepen $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ en $F$ met 1, 1, 2, 5 7 en 8 munten
Wegingen:
$F \Leftrightarrow A + C + D$
$D + E \Leftrightarrow A + B + C + F$
$C + E \Leftrightarrow A + F$
$A + E \Leftrightarrow B + C + D$
Uit de bijbehorende 4 vergelijkingen kunnen we weer door elimineren $c$, $d$, $e$ en $f$ uitdrukken in $a$ en $b$, waarbij $a$ tot en met $f$ de aantallen munten van type $a$ in de groepen zijn.
$c = 3a - b$
$d = 6a - b$
$e = 8a - b$
$f = 10a - 2b$
Omdat $a = 1$ en $b \geq 0$ volgt met $c \leq 2$ uit de eerste uitdrukking: $b = 1$ en $c = 2$. $B$ en $C$ bevatten dus allemaal munten van type $a$. Daarna kunnen we de andere waarden bepalen, en hebben we ook daar allemaal munten van type $a$.

Gerard Bouwhuis liet zien dat zowel $n$ = 24 als $n$ = 26 in 4 wegingen ook kan met 5 groepen.

Extra opgave:

We hadden eerst enkele individuele waarden van $n$ gevonden met $w$ kleiner dan standaard. Het verschil was steeds slechts 1. In opgave 3a zagen we dat we dan voor bepaalde reeksen de waarde van $w$ kunnen verlagen dan volgens de standaard, maar niet voor allemaal.
In opgave 3b zagen we, dat als het verschil 2 of meer wordt, we wel boven een bepaalde waarde van $n$ met minder wegingen toe kunnen dan volgens de standaard.
We dagen u uit te proberen of dat ook al lukt vanaf kleinere waarden van $n$ dan bedoeld bij opgave 3b.

Wij vonden daarvoor 2 methoden.
De eerste gaat uit van de rijtjes van 5 in grootte opvolgende groepen uit opgave 4. U kunt daar nog grotere groepen aan toevoegen die niet opvolgend hoeven te zijn.
De tweede gaat uit van een of twee al gevonden methoden. In veel gevallen[1] blijkt het mogelijk om voor een methode $a$ voor $n$ munten en $v$ wegingen en een methode $b$ voor $m$ munten en $w$ wegingen een methode af te leiden voor $n \cdot m$ munten in $v + w$ wegingen (als $n = m$ en $v = w$ heeft u maar één methode nodig).

Uitwerking extra opgave:
We geven eerst onze eigen oplossing voor $n = 65$, en daarna die van Harm Bakker en Gerard Bouwhuis die ons verrasten door op $n = 33$ uit te komen!

Wij voegden aan de rijtjes van 5 opvolgende getallen een 6e getal toe, dat niet per se opvolgend hoeft te zijn. We zoeken dan 5 mogelijke wegingen die een stelsel van 5 onafhankelijke vergelijkingen opleveren. Bij opgave 4 zagen we dat we dan, als tenminste de GGD van de aantallen in de groepen 1 is, een geldige methode hebben.
De groepen zijn dan
$A$, $B$, $C$, $D$, $E$ en $F$ met aantallen munten: $a$, $a + 1$, $a + 2$, $a + 3$, $a + 4$, $a + d$. We kiezen 4 wegingen met aan beide zijden 2 groepen.
We vonden in opgave 4 drie van die wegingen tussen de eerste 4 groepen, die onafhankelijke vergelijkingen opleveren:
(1) $A + E \Leftrightarrow B + D$
(2) $A + D \Leftrightarrow B + C$
(3) $B + E \Leftrightarrow C + D$
Als 4e kiezen we er een waarin $F$ voorkomt. De vergelijking die daar bij hoort is dan altijd onafhankelijk van de eerste 3.
De waarde van $d$ bepaalt dan de mogelijkheden voor die 4e vergelijking. De grootste waarde van $d$ krijgen we als we als 4e weging kiezen:
(4) $D + E \Leftrightarrow A + F$, zodat $(a + 3) + (a + 4) = a + (d + f)$ moet zijn, dus $d = 7$. De aantallen munten in de groepen worden dan: $a$, $a + 1$, $a + 2$, $a + 3$, $a + 4$, $a + 7$.
Voor de 5e weging nemen we er een met ongelijke aantallen groepen aan beide zijden. De vergelijking die daarbij hoort is dan altijd onafhankelijk van de eerste 4.
De mogelijkheden om zo’n vergelijking te kiezen hangt van $a$ af. De grootste waarde van $a$ krijgen we met:
(5) $A + B + C \Leftrightarrow E + F$, en dus:
$3a + 3 = 2a + 11$, dus $a = 8$, met groepen van 8, 9, 10, 11, 12, 15, dus in totaal 65 munten.

[1] In de opgaven in Euclides was hieraan toegevoegd: (misschien wel alle). In deze uitwerking hebben we voor methode $b$ alleen gebruikt: $n$ =.10, groepen van 1, 2, 3 en 4 munten. Dat is gemakkelijk te generaliseren naar: de methode $b$ is een methode met een groep van 1 munt, en één groep meer dan het aantal wegingen. Wij konden het ook bewijzen voor het geval dat zowel $a$ als $b$ methodes zijn met één groep meer dan het aantal wegingen, en methode $b$ bevat een groep met $k$ munten, waarbij GGD($m$, $k$) = 1. Dat zijn dus inderdaad erg veel methodes. Wij vroegen ons af of het voor alle methoden geldt, maar inmiddels zijn we ervan overtuigd dat dat niet zo is.

We kunnen dus voor 65 munten toe met 5 wegingen en dat is 2 minder dan de standaard, zodat we vanaf 65 munten toekunnen met minder wegingen dan de standaard.

Maar het kan dus nog beter. Door de oplossing voor $n = 30$ in 4 wegingen hebben we al oplossingen voor 31 tot en met 60 in 5 wegingen. Daarvan zijn dus 33 tot en met 60 met minder wegingen dan de standaard. Als 61 tot en met 64 ook in 5 wegingen kunnen dan kunnen we vanaf 33 munten toe met minder dan de standaard. Daarvoor hebben we bovenstaande oplossing voor 65 munten zelfs niet nodig: omdat 64 een 2-macht is komen als 64 onder de standaard blijft ook alle getallen daarna onder de standaard.
Gerard en Harm gaven allebei methoden voor 61 tot en met 64 in 5 wegingen, en toonden daarmee aan:
Vanaf 33 munten kunnen we toe met minder wegingen dan de standaard.
Harm vond de daarvoor benodigde verdeling in groepen en de vergelijkingen door een computerprogramma te schrijven dat oplossingen voor hem zocht. Knap werk! Maar daardoor weten we bij hem alleen de resultaten.
Gerard vond de oplossingen door redeneren en proberen, en gaf zijn gedachtengang weer in zijn inzending. We geven die in wat verkorte en iets aangepaste vorm hieronder weer.

Hij ging, net als wij, uit van rijtjes van 6 getallen, en ging die variëren. Hij varieerde daarbij de laatste 2 getallen, waarbij hij het verschil tussen die laatste 2 getallen constant hield, dus $a$, $a + 1$, $a + 2$, $a + 3$, $d$, $d + v$. (met $d > a + 3$ en $v > 0$)
Hij zocht daarom steeds 4 onafhankelijke wegingen waarin de laatste twee groepen ofwel elk aan een kant van de weegschaal staan, ofwel niet voorkomen, zodat dezelfde wegingen mogelijk blijven bij verhoging van $d$. Dan zocht hij een 5$^e$ weging waarin precies één van de twee laatste groepen voorkomt, en die dus onafhankelijk is van de eerste 4.

Hij probeerde dat met verschillende begingetallen en had succes bij $a = 4$, bij verschillende waarden van $v$. Om het laatste gaatje te dichten had hij ook nog $a = 5$ nodig.
Dus groepen $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ en $F$ met aantallen munten: 4, 5, 6, 7, $d$, $d + v$, dus het aantal munten is $n = 22 + 2x + v$.

Voor de 5$^e$ weging moet er een som of verschil van de eerste 4 groepen gelijk aan $d$ of $d + 2$.
$v = 1$ bleek niets op te leveren (er zijn geen 4 onafhankelijke wegingen die voor alle $d$ mogelijk blijven), dus hij probeerde $v = 2$:

Groepen $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ en $F$ met aantallen munten: 4, 5, 6, 7, $d$, $d + 2$
Het totaal aantal munten met $v$ =2 is dan $n = 24 + 2x$. Voor $n = 62$ is dat $d = 19$ en voor $n = 64$ is $d = 20$.
Wegingen waarin $E$ en $F$ ofwel aan 2 kanten voorkomen of niet voorkomen:
(1) $A + D \Leftrightarrow B + C$
(2) $C + E \Leftrightarrow A + F$
(3) $A + B + E \Leftrightarrow D + F$
(4) $B + D + E \Leftrightarrow A + C + F$
Deze wegingen zijn onafhankelijk (we laten de controle daarvan aan u over).

Voor de 5e weging moet of $E$ of $F$ worden gebruikt en dat lukt niet voor $d = 19$ ($E = 19$, $F = 21$).
Wel voor $d = 20$ ($E = 20$, $F = 22$) zodat de aantallen munten 4, 5, 6, 7, 20, 22 zijn.

(5) $A + B + C + D \Leftrightarrow F$
Inderdaad is het totaal aantal munten dan 64 en hebben we 5 onafhankelijke vergelijkingen die kloppen met de aantallen in de groepen, en dus hebben we een methode voor 64 munten in 5 wegingen.

Om verder te komen probeerde hij $v = 3$:
Groepen $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ en $F$ met aantallen munten: 4, 5, 6, 7, $d$, $d + 3$
Het totaal aantal munten is nu $25 + 2x$, met mogelijk oplossingen voor $n = 61$ ($d = 18$) en voor $n = 63$ ($d = 19$).
Onafhankelijke wegingen die geldig blijven voor alle waarden van $d$:
(1) $A + D \Leftrightarrow B + C$
(2) $D + E \Leftrightarrow A + F$
(3) $A + B + E \Leftrightarrow C + F$
(4) $A + C + E \Leftrightarrow D + F$

Voor $n = 61$ ($d = 18$):
(5) $B + C + D \Leftrightarrow E$
Dus aantallen munten 4, 5, 6, 7, 18, 21.
Inderdaad hebben we dan 61 munten en 5 kloppende vergelijkingen.

Voor $n = 63$ ($d = 19$):
(5) $A + B + C + D \Leftrightarrow F$
Dus aantallen munten 4, 5, 6, 7, 19, 22.
Met ook voor 63 munten kloppende vergelijkingen.

Dan missen we nog 62.
Hij probeerde daarvoor $v = 4$, dat lukte niet met $a = 4$, maar wel met $a = 5$.
Groepen $A$, $B$, $C$, $D$, $E$ en $F$ met aantallen munten: 5, 6, 7, 8, $d$, $d + 4$
Het totaal aantal munten is nu $30 + 2x$, met mogelijk een oplossing voor $n = 62$ ($d = 16$ )

Onafhankelijke wegingen die geldig blijven voor alle waarden van $d$:
(1) $A + D \Leftrightarrow B + C$
(2) $A + B + E \Leftrightarrow C + F$
(3) $A + C + E \Leftrightarrow D + F$
(4) $C + D + E \Leftrightarrow A + B + F$
En als 5$^{e}$ weging voor $d = 16$, dus $e = 20$:
(5) $A + C + D \Leftrightarrow E$

En daarmee hebben we alles wat we nodig hebben om te kunnen constateren:
Vanaf $n = 33$ kunnen we voor elke waarde van $n$ toe met minder wegingen dan de standaard.

Enkele inzenders (Harm, Gerard en Kees Vugs) keken ook nog naar waarden van $n < 33$ en vonden daarvoor allerlei oplossingen.
Resultaat: Voor $n \geq 17$ is er voor elke $n$ een verbetering ten opzichte van de standaard behalve voor $n = 31$ en $n = 32$.

**Toegift**: We hadden een standaard waarbij de grenzen steeds een factor 2 opschuiven. Maar de methode van Gerard met ‘verschuifbare’ groepen zoals 4, 5, 6, 7, $d$, $d + v$ inspireerde ons nog tot een methode waarbij we een standaard kunnen berekenen waarbij de grenzen steeds bijna een factor 3 opschuiven.  Bovendien geeft die methode ons een algoritme waarmee we de weegschema's voor bijvoorbeeld $n = 61$ tot en met 64 direct kunnen bepalen, dus zonder ‘handig’ proberen.

Hieronder laten we zien dat je een weegschema voor $n$ munten, $w$ wegingen en $w + 1$ groepen kan ombouwen tot een weegschema voor bijna $3n$ munten in $w + 1$ wegingen en $w + 2$ groepen.
Daarna laten we zien dat we met behulp daarvan de oplossingen in 5 wegingen voor 61 tot en met 64 nu kunnen vinden met aanzienlijk minder zoekwerk, en dat we de reeks nog kunnen voortzetten tot 70.

Ten slotte gaan we de methode gebruiken om alle grenzen uit onze standaard aanzienlijk te verbeteren.

Weegschema's voor $n$ munten met $w$ wegingen en $w + 1$ groepen bouwen we, voor zekere waarden van $d < n$, om tot een weegschema voor $n + 2d$ munten met $w + 1$ wegingen en $w + 2$ groepen.
We geven daarvoor hieronder een recept en passen dat recept toe op een al bekend weegschema.

We gebruiken het volgende recept:

1. Kies $d < n$ zo dat er een weging mogelijk is met een groep van $d$ munten en de bestaande groepen, en waarbij $m = n + 2d$ een waarde is waarvoor we een oplossing zoeken.
2. Kies één van de bestaande groepen, zeg groep $X$, die bij bovenstaande weging ofwel niet gebruikt is, ofwel op dezelfde schaal komt als de groep van $d$ munten.
3. Voeg aan de bestaande groepen 2 groepen met elk $d$ munten toe en voeg één van die groepen samen met groep $X$. Groep $X$ verdwijnt dus en er zijn nu $n + 2d$ munten in $w + 2$ groepen.
4. Vervang in alle wegingen van de bestaande methode groep $X$ door de groep waarin hij is opgegaan, en compenseer dat door de groep van $d$ munten op de andere schaal toe te voegen.
5. Voor de laatste weging: gebruik de weging uit punt 1. Als groep $X$ daarin niet gebruikt is bent u klaar. Als hij wel gebruikt is ligt hij op dezelfde schaal als de groep van $d$ munten. Vervang dan beide groepen samen door de samengestelde groep.

We nemen als voorbeeld het weegschema dat we al hadden met $n = 30$ in 4 wegingen met groepen $A$, $B$, $C$, $D$ en $E$ van 4, 5, 6, 7 en 8 munten en passen daarop het recept toe.
Stel we zoeken een schema voor $n = 62$. Dan moet dus $30 + 2d = 62$, dus $d = 16$.

Stap 1: We zoeken dus een weging met een groep $F$ van 16 munten en een of meer groepen uit (4, 5, 6, 7, 8). Dat lukt wel, bijvoorbeeld $B + F \Leftrightarrow C + D + E$ $(5 + 16 = 6 + 7 + 8)$
Stap 2: Groep $A$ hebben we niet gebruikt, dus die kiezen we als groep $X$
Stap 3: We voegen 2 groepen van 16 munten toe en voegen één ervan samen met groep $A$. De nieuwe groepen noemen we $F$ en $G$. We hebben dan de groepen $B$, $C$, $D$, $E$, $F$ en $G$ met 5, 6, 7, 16 en 20 munten.
Stap 4: We vervangen in de oude wegingen de verdwenen groep $A$ door de samengestelde groep $G$ en compenseren dat door groep $F$ op de andere schaal toe te voegen:

| Weging voor $n = 30$ | Weging voor $n = 62$ |
|---|---|
| $A + E \Leftrightarrow B + D$ | $G + E \Leftrightarrow B + D + F$ |
| $A + D \Leftrightarrow B + C$ | $G + D \Leftrightarrow B + C + F$ |
| $B + E \Leftrightarrow C + D$ | $B + E \Leftrightarrow C + D$ |
| $A + B + C \Leftrightarrow D + E$ | $G + B + C \Leftrightarrow D + E + F$ |

Stap 5: Voor de laatste weging gebruiken we de weging uit stap 1: De verdwenen groep komt daar niet in voor, dus we kunnen hem onveranderd gebruiken.
$B + F \Leftrightarrow C + D + E$

We hebben nu een weegschema voor 62 munten in 5 wegingen. Merk op dat dit precies het weegschema is dat Harm Bakker vond voor 62 munten!

In stap 1 staat: $d < n$ (we kunnen natuurlijk een weging vinden voor $d = n$, maar dan lukt stap 2 niet). De grootste waarde van $d$ krijgen we als we voor de weging van stap 1 alle groepen behalve de kleinste aan één kant leggen. Dan hebben we $d = n - a$ , waarin $a$ het aantal munten van de

kleinste groep is. Het aantal munten van de nieuwe groep is dan $m = n + 2d = 3n - 2a$.
Als de kleinste groep klein is t.o.v. $n$, dan wordt dus het aantal munten bijna 3x zo groot met één weging meer.
En we kunnen dat ombouwen herhaald toepassen en zo oplossingen vinden voor steeds grotere waarden van $n$.

Zie voor een bewijs dat dit altijd kan het bewijs aan het eind van deze uitwerking.

We gaan nu laten zien dat we met behulp van deze methode de oplossingen in 5 wegingen voor 61 tot en met 64 kunnen vinden met aanzienlijk minder zoekwerk, en dat we de reeks nog kunnen voortzetten tot 70.

We weten dat het aantal munten in de afgeleide methode is $n + 2d$, waarin $n$ het aantal munten is in de al bestaande methode. De methoden hebben dus dezelfde pariteit, en voor 61 en 63 moeten we dus uitgaan van een oneven methode. De grootste oneven $n$ die we kennen en die we aankunnen met 5 groepen en 4 onafhankelijke wegingen is $n = 25$, met groepen 3, 4, 5, 6, 7. (we hebben voor 27 en 29 wel methoden om met 4 wegingen toe te kunnen, maar die zijn met 6 groepen).
We hebben nodig: $25 + 2d \geq 61$, dus $d \geq 18$. De waarden van $d$ die we kunnen gebruiken zijn lineaire combinaties van 3, 4, 5, 6 en 7, met coëfficienten 1, 0 of -1, die niet allemaal 1 mogen zijn.
Dat lukt voor $d = 18$ (5 + 6 + 7), 19 (3 + 4 + 5 + 7), 20 (3 + 4 + 6 + 7), 21 (3 + 5 + 6 + 7) en 22 (4 + 5 + 6 + 7).
We kunnen dus voor alle oneven $n$ van 61 tot en met $25 + 2 \cdot 22 = 69$ toe met 5 wegingen.

De even waarden kunnen we vinden vanuit de methode voor 30 munten met groepen 4, 5, 6, 7, 8.
We hebben nodig $30 + 2d \geq 62$, dus $d \geq 16$. We kunnen maken 16 (4 +5 + 7), 17 (4 +5 + 8), 18 (4 + 6 + 8), 19 (5 + 6 + 8), 20 (5 + 7 + 8), 21 (6 + 7 + 8) en 22 tot en met 26, door steeds één groep weg te laten uit de optellingen.
Hiermee kunnen we methoden voor even $n$ maken van $n = 62$ tot en met 82, allemaal in 5 wegingen.

We kunnen dus met 5 wegingen toe tot en met 70, en we hebben een methode in 5 wegingen voor $n = 82$, zodat we tot en met $n = 164$ toe kunnen met 6 wegingen, en daarna tot en met 328 met 7.

We gaan nu de methode gebruiken om alle grenzen uit onze standaard aanzienlijk te verbeteren.

We hebben tot en met $n = 69$ methoden in 5 wegingen, en dus (door verdubbelen) methoden voor 70 tot en met 138 met 6 wegingen. Maar we vonden ook een methode voor $n = 82$ in 5 wegingen, zodat we ook door verdubbelen voor n = 83 tot en met 164 toekunnen met 6 wegingen, en daarna met 7 tot en met $n = 328$.
Uit de methode die we nu hebben voor $n = 82$ in 5 wegingen en groepen 5, 6, 7, 8, 26, 30 kunnen we een methode maken met groepen 6, 7, 8, 26, 30, $d$, $d + 5$ met $d = 82 - 5 = 77$, dus groepen 6, 7, 8, 26, 30, 77, 82 met $n = 3 \cdot 82 - 2 \cdot 5 = 236$, in 6 wegingen.
We konden met $n = 82$ in 5 wegingen van $n = 165$ tot en met 328 toe met 7 wegingen, maar dat traject kunnen we nu verlengen: we kunnen tot en met $n = 2 \cdot 236 = 472$ toe met 7 wegingen.

De grenzen van de gebieden met een bepaald aantal wegingen zijn dus steeds het dubbele van de met behulp van onze methode gevonden waarden van $n$.

We kunnen zo doorgaan: Uit de methode voor $n = 236$, met groepen 6, 7, 8, 26, 30, 77, 82 in 6

wegingen kunnen we weer een methode afleiden voor $n = 3 \cdot 236 - 2 \cdot 6 = 696$ en groepen 7, 8, 26, 30, 77, 82, 690, 696 in 7 wegingen, en dus kunnen we tot en met 1392 toe met 8 wegingen, enzovoort.
Hieronder een schema, in rood de standaard, in blauw de waarden die we nu hebben :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $8 < n \leqslant 16$: w = 4 | $16 < n \leqslant 32$: w = 5 | $32 < n \leqslant 64$: w = 6 | $64 < n \leqslant 128$: w = 7 | $128 < n \leqslant 256$: w = 8 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $8 < n \leqslant 30$: w = 4 | $30 < n \leqslant 70$: w = 5 | $70 < n \leqslant 164$: w = 6 | $164 < n$: w = 7 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $256 < n \leqslant 512$: w = 9 | $512 < n \leqslant 1024$: w = 10 | $1024 < n \leqslant 2048$: w = 11 | $2048 < n \leqslant 4096$: w = 12 |

| | | |
|---|---|---|
| $164 < n \leqslant 472$: w = 7 | $472 < n \leqslant 1392$: w = 8 | $1392 < n \leqslant 4148$: w = 9 |

We zien dat de blauwe gebieden, ook voor grotere waarden van $n$, groter zijn dan de rode. Terwijl de volgende grens in de rode gebieden steeds 2 maal zo groot is als de vorige, zijn ze in de blauwe gebieden bijna 3x zo groot. En dat blijft zo en komt op den duur steeds dichter bij 3 te liggen: de grootte van de kleinste groep is bij meer groepen een steeds kleiner deel van het geheel.

Binnen de blauwe gebieden zijn natuurlijk wel losse waarden van $n$ waarbij we met minder dan de aangegeven aantallen wegingen toekunnen.

Kan het nog beter? Ja, waarschijnlijk wel!

**Bewijs dat de hierboven gebruikte methode altijd werkt.**
We gaven een recept om een 'geldig' weegschema voor $n$ munten, $w$ wegingen en $w + 1$ groepen om voor bepaalde waarden van $d$ om te bouwen tot een weegschema voor $n + 2d$ munten in $w + 1$ wegingen en $w + 2$ groepen. Het recept levert ons de waarden van $d$ waarvoor dat kan, de indeling van $n + 2d$ in $w + 2$ groepen en een weegschema waarbij aan beide zijden van de weegschaal steeds evenveel munten liggen.

Om zeker te weten dat het nieuwe weegschema ook 'geldig' is, is het nuttig om eerst precies te formuleren wanneer een weegschema 'geldig' is.

Bij een weegschema met één groep meer dan het aantal wegingen kunnen we de wegingen omzetten in vergelijkingen waarvan zowel de totale aantallen munten als de aantallen munten van beide soorten een oplossing vormen. We zagen eerder: als de vergelijkingen onafhankelijk zijn leggen ze de verhouding tussen de aantallen munten in de groepen vast.
Als nu de totale aantallen munten de kleinste geheeltallige oplossing van het stelsel zijn, dan moeten de aantallen van één van de soorten ofwel allemaal 0, ofwel allemaal gelijk aan het totaal zijn.
En de totale aantallen munten in de groepen zijn de kleinste oplossing als de GGD van alle aantallen munten in de groepen 1 is.

We hebben daarmee een criterium voor het geldig zijn van een weegschema met één groep meer dan het aantal wegingen: We noemen zo'n weegschema geldig als de wegingen onafhankelijke vergelijkingen opleveren en de GGD van alle groepsgrootten = 1.

We moeten dus bewijzen: Als we een weegschema hebben met $w$ onafhankelijke wegingen en $w + 1$ groepen waarvan GGD van de groepsgroottes 1 is, dan geldt dat ook voor het resultaat van

ons recept.

**Bewijs dat het nieuwe stelsel onafhankelijk is:**
Punt 3 uit het recept zegt: Vervang in alle wegingen van de bestaande methode de verdwenen groep door de groep waarin hij is opgegaan, en compenseer dat door de groep van *d* munten op de andere schaal toe te voegen.
Laat de oude methode groepen $A_0, A_1, \ldots A_w$ hebben en de nieuwe methode de groepen $A_0, A_1, \ldots, A_{j-1}, A_{j+1}, \ldots A_{w+1}, A_{w+2}$. Groep $A_j$ wordt dus in de weging vervangen door groep $A_{w+2}$ en groep $A_{w+1}$ wordt op de andere schaal toegevoegd.
Als we de wegingen omzetten in vergelijkingen met variabelen $a_0$ tot en met $a_{w+2}$ dan wordt in de *w* vergelijkingen van de oude methode $a_j$ vervangen door $(a_{w+2} - a_{w+1})$
Als dus de oorspronkelijke vergelijkingen onafhankelijk zijn, zijn de eerste *w* vergelijkingen van het nieuwe stelsel ook onafhankelijk.
In die eerste *w* vergelijkingen komt van $a_{w+1}$ en $w_{w+2}$ alleen het verschil voor.
In de laatste vergelijking komt ofwel $a_{w+1}$ voor, ofwel $a_{w+2}$, maar nooit allebei.Die laatste vergelijking kan dus nooit afhankelijk zijn van de eerste *w* vergelijkingen.
Dus is het hele stelsel onafhankelijk.
QED

**Bewijs dat de GGD van de groepen in het nieuwe stelsel 1 is**::
De GGD van alle groepsgroottes van het oude stelsel is 1.
Laat de “verdwenen” groep groepsgrootte *g* hebben.
De GGD van alle groepsgroottes van het oude stelsel behalve *g* kan natuurlijk wel > 1 zijn, stel die is *s*. Dan moet natuurlijk GGD(*s*, *g*) = 1. Laat GGD(*d*, *d* + *g*) = *t*. Dan is *t* een deler van *g*, en dus is ook GGD(*s*, *t*) = 1. Nu hebben we: De GGD van alle uit de oude methode overgenomen groepsgroottes is *s*, en de GGD van de 2 nieuwe groepen is *t*, met GGD(*s*, *t*) = 1. Dan is dus de GGD van alle groepen uit de nieuwe methode 1
QED